"برهان" قوانين القوى – صف تاسع

بداية , الرفع لقوّة معينة معناه من ناحية رياضيّة هو ضرب القيمه (الأساس) بنفسها , عدد معين من المرات (يسمى الأسّ).
فالأس هو **العدد الكلي لمرّات ظهور نفس القيمه في سطر الضرب. (أشدد على هذه العبارة كي لا يأخذ الطالب جملة "ضرب العدد في نفسه" باعتبار عدد مرات تنفيذ عملية الضرب وهو بهذه الجمله مره واحده , لكن العدد يظهر فيها مرتين – فلأس يساوي 2).**

بعبارة أخرى:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \dots \cdot a \cdot a}_{a \text{ يظهر } n \text{ مرات}}$$

ساقوم أدناه بتوضيح مواقع وتكرار ظهور a بواسطة عدّاد , اكتبه ادنى المتغير .. فيكون الامر كالتالي :

$$a^n = [a]_1 \cdot [a]_2 \cdot [a]_3 \dots \cdot [a]_{n-1} \cdot [a]_n$$

القانون الأول (من قوانين الأساسات المتساوية)

$$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$$

$$a^n \cdot a^k = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \dots \cdot a \cdot a)}_{n \text{ مرات}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a \dots \cdot a \cdot a)}_{k \text{ مرات}}$$

من هنا فإن a في السطر أعلاه "يظهر" $n+k$ مرات , فالأقواس هنا لا معنى لها سوى التوضيح فقط

$$a^n \cdot a^k = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \dots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \dots \cdot a \cdot a)}_{n+k \text{ مرات}} = a^{n+k}$$

لقانون الثاني (من قوانين الأساسات المتساوية)

$$\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k} \qquad a \neq 0 \quad , \quad n > k$$

التحديد $a \neq 0$ هام جدا وجوهري - لأن القسمة على صفر (في المقام) غير جائزة (غير معرّفة).

أما التحديد $n > k$ فهو غير جوهري .. سنتعلم لاحقا معنى قيم القوى السالبه.

$$\frac{a^n}{a^k} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \dots \cdot a \cdot a}^{n \text{ مرات}}}{\underbrace{(a \cdot a \dots \cdot a \cdot a)}_{k \text{ مرات}}} = \frac{\overbrace{[a]_1 \cdot [a]_2 \cdot [a]_3 \dots [a]_k}^{k \text{ مرات}} \cdot \overbrace{[a]_{k+1} \cdot \dots \cdot [a]_n}^{n-k \text{ مرات}}}{\underbrace{[a]_1 \cdot [a]_2 \cdot [a]_3 \dots [a]_k}_{k \text{ مرات}}}$$

مهم فهم فكرة كتابة الـ n مرات بالشكل الظاهر أعلاه .. والسبب أنّ $n > k$! **تأكد من فهم ذلك** قبل الاستمرار.

فـ 10 أشياء هي 6 والباقي 4 , مثلا .. 12 شيء هي 2 والباقي 10 , 100 شيء هي 80 والباقي 20 .. وبنفس الطريقة n شيء هي k والباقي الفرق $(n-k)$.

في الكسر أعلاه نقوم باختزال :

$$= \frac{\cancel{[a]_1 \cdot [a]_2 \cdot [a]_3 \dots [a]_k} \cdot \overbrace{[a]_{k+1} \cdot \dots \cdot [a]_n}^{n-k \text{ مرات}}}{\cancel{[a]_1 \cdot [a]_2 \cdot [a]_3 \dots [a]_k}} = a^{n-k}$$

قيمة – الرفع للقوّة صفر , بناء على القانون أعلاه

$$a^0 = 1 \qquad a \neq 0$$

كحيلة لبرهان هذه القيمة , نقوم بكتابة الصفر كطرح قيمتين متساويتين $(n - n)$ .. ثم نعتمد على القانون الثاني (بقراءة من اليمين إلى اليسار):

$$a^0 = a^{n-n} = \frac{\cancel{a^n}}{\cancel{a^n}} = 1$$

قيمة – الرفع للقوّة سالب n , بناء على القانون أعلاه

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a \neq 0$$

نستخدم نفس الحيلة , ونقوم بكتابة $-n$ كطرح قيمة من الصفر $(0 - n)$:

$$a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$

القانون الثالث (من قوانين الأسس المتساوية)

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \dots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ مرات}}$$

الاقواس في التعبير أعلاه لا قيمة لها سوى الترتيب والايضاح

من هنا فان التعبير أعلاه هو $a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot \dots \cdot a \cdot b$ وفيه a مكرر n مرات وكذلك b مكرر كذلك n مرات.

وبما ان عملية الضرب هي عملية تبديليه .. اذن يمكن ان نبدل مواقع الاعداد بحيث نكتب جميع مرات ظهور a بالبدايه وجميع مرات ظهور b في النهاية على الشكل التالي :

$$(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \dots \cdot (a \cdot b) = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ مرات}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot \dots \cdot b)}_{n \text{ مرات}} = a^n \cdot b^n$$

وسام السلوي 2019

القانون الرابع (من قوانين الأسس المتساوية)

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad b \neq 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\right)\cdot \dots \cdot \left(\frac{a}{b}\right)}_{n \text{ مرات}}$$

هذا التعبير يمكن كتابته بصورة كسر , بسطه يحتوي مضروب a بنفسه n من المرات ومقامه هو ضرب b بنفسه n مرات , كالتالي :

$$= \frac{\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot \dots \cdot a}^{n \text{ مرات}}}{\underbrace{b\cdot b\cdot b\cdot b\cdot \dots \cdot b}_{n \text{ مرات}}} = \frac{a^n}{b^n}$$

القانون الخامس (رفع قوّة لقوّة)

$$(a^n)^k = a^{n\cdot k}$$

$$(a^n)^k = \underbrace{(a^n)\cdot(a^n)\cdot(a^n)\cdot \dots \cdot (a^n)}_{k \text{ مرات}}$$

حسب القانون الأول أعلاه (مضروب قوى أساسها متساوي) يمكن ان نكتب قيمة مضروب القوى , كالتالي :

$$= a^{\overbrace{n+n+n+\cdots+n}^{k \text{ مرات مجموع لنفسه } n}} = a^{n\cdot k}$$

قوانين الجذور

اذا ادرك الطالب بان عملية الجذر , هي عمليا **رفع للقوّة** $\frac{1}{2}$, فانه سيتمكن من برهنة جميع قوانين الجذور فوراً باستخدام **قوانين القوى** المذكورة أعلاه , كالتالي :

- $\sqrt{a\cdot b} = (a\cdot b)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$
  $(a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n$

- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

- $\sqrt{a^k} = (a^k)^{\frac{1}{2}} = a^{k\cdot\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}\cdot k} = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^k = \left(\sqrt{a}\right)^k$
  $(a^n)^k = a^{n\cdot k}$, $a^{n\cdot k} = (a^n)^k$

وسام السلوي 2019